何书元《应用时间序列分析》习题整理

OrangeCat

Jan.25th 2026 - ???

1 时间序列

1.1 时间序列的分解

习题1 证明课本例1.2 方法3中a, b, c 的最小二乘估计是

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^T = (YY^T)^{-1}YX.$$

「方法3」二次曲线趋势：我们还可以用二次曲线来拟合数据的趋势项，这时认为(x_t, t)满足二元线性回归模型：

$$x_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t, \qquad t = 1, 2, \cdots.$$

定义

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_{24})^T, \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 24 \\ 1 & 2^2 & \cdots & 24^2 \end{bmatrix}.$$

$(a, b, c)^T$的最小二乘估计由公式

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^T = (YY^T)^{-1}YX$$

决定。

解答: 只用证明最小二乘估计满足矩阵乘法

$$(YY^T)(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^T = YX$$

即可. 展开即为

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{m} 1 \cdot a + \sum_{n=1}^{m} n \cdot b + \sum_{n=1}^{m} n^2 \cdot c = \sum_{n=1}^{m} x_n \ldots ① \\ \sum_{n=1}^{m} n \cdot a + \sum_{n=1}^{m} n^2 \cdot b + \sum_{n=1}^{m} n^3 \cdot c = \sum_{n=1}^{m} n x_n \ldots ② \\ \sum_{n=1}^{m} n^2 \cdot a + \sum_{n=1}^{m} n^3 \cdot b + \sum_{n=1}^{m} n^4 \cdot c = \sum_{n=1}^{m} n^2 x_n \ldots ③ \end{cases}$$

我们考察原数据关系$x_n = a + bn + cn^2 + \varepsilon_n \ (1 \le n \le m)$.

目标是令$\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n^2$ 尽量小$\Rightarrow f(a.b.c; x_1, x_2..x_n) = \sum_{n=1}^{m}(x_n - a - bn - cn^2)^2$ 尽量小, 这要求$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2\sum_{n=1}^{m} 1 \cdot a - \sum_{n=1}^{m} 2(x_n - bn - cn^2) = 0 \ \Leftrightarrow ①$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2\sum_{n=1}^{m} n^2 \cdot b - \sum_{n=1}^{m} 2n(x_n - cn^2 - a) = 0 \ \Leftrightarrow ②$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = 2\sum_{n=1}^{m} n^4 \cdot c - \sum_{n=1}^{m} 2n^2(x_n - a - bn) = 0. \ \Leftrightarrow ③$$

证毕。□

习题2、3为课本数据处理，解答过于繁琐复杂，此处从略。

习题4　对随机变量ξ证明下面的结论：

(1)如果$E|\xi| = 0$, 则$P(\xi = 0) = 1$;

(2)如果$\mathrm{Var}(\xi) = 0$, 则$P(\xi = m) = 1$, 这里$m = E\xi$;

(3)如果$E|\xi| < \infty$, 则$P(|\xi| < \infty) = 1$;

(4)切比雪夫不等式：对任何正常数α, ε,

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq E|\xi|^\alpha / \varepsilon^\alpha.$$

解答：(1)若不然：设$P(\varepsilon = 0) = p_0 < 1. \Rightarrow P(\varepsilon \neq 0) = 1 - p_0 > 0.$

取α足够小，使得$P(|\varepsilon| < \alpha) \leq \frac{1}{2}(1 + p_0)$ (这样的α显然是存在的).

从而$P(|\varepsilon| > \alpha) \geq \frac{1}{2}(1 - p_0) \Rightarrow E(|\varepsilon|) \geq \frac{1}{2}\alpha(1 - p_0) > 0.$ 矛盾！证毕。□

(2)若不然：设$P(\varepsilon = E(\varepsilon)) = p_0 < 1.$ 同上一问。我们取$\alpha > 0$使得

$$P\big(\varepsilon \in (E(\varepsilon) - \alpha, E(\varepsilon) + \alpha)\big) \leq \frac{1}{2}(1 + p_0).$$

则有

$$\mathrm{Var}(\varepsilon) = E\big((X - E(X))^2\big) > P(|\varepsilon - E(\varepsilon)| > \alpha) \cdot \alpha^2 = \frac{1}{2}(1 - p_0) \cdot \alpha^2 > 0. \text{ 矛盾! } \square$$

(4)若不然：$P(|\xi| \geq \varepsilon) > E|\xi|^\alpha / \varepsilon^\alpha.$

$$E|\xi|^\alpha \geq \varepsilon^\alpha \cdot P(|\xi| \geq \varepsilon) > \varepsilon^\alpha \cdot \left(\frac{E|\xi|^\alpha}{\varepsilon^\alpha}\right) = E|\xi|^\alpha. \text{ 矛盾! } \square$$

1.2　平稳序列

习题2.1　设时间序列$\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$满足：

(1) 对任何$t \in \mathbb{Z}$, $EX_t^2 < \infty$;

(2) 对任何$t \in \mathbb{Z}$, $EX_t = \mu$;

(3) 对任何$t, s \in \mathbb{Z}$, $E(X_t X_s) = b_{t-s}$。

证明$\{X_t\}$是平稳时间序列，并求它的自协方差函数。

解答：平稳序列的要求是：$\forall t \in \mathbb{N}$ 有$EX_t^2 < \infty$，$EX_t = \mu$. 且 $\forall t, s \in \mathbb{N}$，$E\big[(x_t - \mu)(x_s - \mu)\big] = \gamma_{t-s}$

在$EX_t = \mu$时，$E[x_t x_s] = b_{t-s} \Leftrightarrow \ E\big[(x_t - \mu)(x_s - \mu)\big] = b_{t-s} - \mu^2$ 而且有自协方差函数$\gamma(h) = b_h - \mu^2$. □

习题2.2　设X和Y是方差有限的随机变量. 证明若$EX = 0$, 则$E(XY) = \mathrm{cov}(X, Y)$.

解答：

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$$

$$= E\big(X(Y - E(Y))\big) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY). \square$$

习题2.3　如果平稳序列$\{X_t\}$的n阶自协方差矩阵退化，则对任何$m > n$, 一定存在常数$a_0, \cdots, a_{n-1}$, 使得

$$X_m = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j X_{m-j}, \quad a.s..$$

解答：自协方差矩阵是半正定矩阵.

故自协方差矩阵退化$\Leftrightarrow \exists \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$使得$\alpha^T \Gamma_n \alpha = 0. \Leftrightarrow \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n \alpha_i (X_i - \mu)) = 0.$

$\Leftrightarrow P(\sum_{i=1}^n \alpha_i (X_i - \mu) = 0) = 1.\ \forall t \in \mathbb{N}. \Leftrightarrow\ X_m = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j X_{m-j},\ a.s.$ □

习题2.4 平稳序列$\{X_t\}$有n阶自协方差矩阵Γ_n. 求$X_n, X_{n-1}, \cdots, X_1$的协方差矩阵.

解答：由于平稳序列定义以及自协方差函数是偶函数，可知$\Gamma_{\text{reverse}} = \Gamma_n$. □

1.3 线性平稳序列和线性滤波

习题3.1 如果输入序列$\{X_t\}$是由(3.4)定义的线性平稳序列，则从保时线性滤波器H输出的序列$\{Y_t\}$也是线性平稳序列。

「定义3.4」如果实数列$\{a_j\}$满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

就称$\{a_j\}$是绝对可和的。对于绝对可和的实数列$\{a_j\}$，定义零均值白噪声$\{\varepsilon_t\}$的无穷滑动和如下

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

解答：输入序列$\{X_t\}$是方差有限白噪声$\{\varepsilon_t\}$的动态滑动和

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$

保时线性滤波器

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j X_{t-j},$$

要求系数绝对可和

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |h_j| = c < +\infty,$$

则线性滤波器是稳定的。我们验证$\{Y_t\}$也是平稳序列：

(1)

$$E[Y_t] = E\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j X_{t-j}\right] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j E[X_{t-j}] = 0.$$

(2)

$$E[Y_t^2] = E\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j X_{t-j}\right)^2\right] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j E[X_{t-i} X_{t-j}].$$

又$E[X_n] = 0$对$\forall n \in \mathbb{Z}$成立，故

$$E[Y_t^2] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j \gamma_X(i-j) \le \left|\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h_i|\right|^2 c < +\infty.$$

(3) 对$\forall t_1, t_2$，有$E[Y_{t_1}] = E[Y_{t_2}] = 0$，且

$$\begin{aligned} E\big[(Y_{t_1} - E[Y_{t_1}])(Y_{t_2} - E[Y_{t_2}])\big] &= E[Y_{t_1} Y_{t_2}] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j E[X_{t_1-i} X_{t_2-j}] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j \gamma_X\big((t_1 - i) - (t_2 - j)\big), \end{aligned}$$

只依赖于t_1-t_2，对t_1,t_2平移性质不变。故$\{Y_t\}$平稳，且显然仍为线性序列。证毕。□

习题3.2　设$\{X_t\}$是由(3.1)定义的有限滑动和。若多项式

$$a(z)=\sum_{j=0}^{q}a_jz^j\neq 0\quad \text{对一切}|z|=1\ \text{成立},$$

则存在实数$b_0,b_1,\ldots,b_q$和零均值白噪声$\{\eta_t\}$使得

$$X_t=b_0\eta_t+b_1\eta_{t-1}+\cdots+b_q\eta_{t-q},\qquad t\in\mathbb{Z},$$

并且当$|z|\leq 1$时，多项式

$$b(z)=\sum_{j=0}^{q}b_jz^j\neq 0.$$

「定义3.1」设$\{\varepsilon_t\}=\{\varepsilon_t:\ t\in\mathbb{Z}\}$是$WN(0,\sigma^2)$，对于非负整数$q$和常数$a_0,a_1,\cdots,a_q$，我们称

$$X_t=a_0\varepsilon_t+a_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+a_q\varepsilon_{t-q},\qquad t\in\mathbb{Z}\tag{3.1}$$

是白噪声$\{\varepsilon_t\}$的(有限)运动平均，简称为MA (Moving Average)。

解答：设$\{\varepsilon_t\}\sim WN(0,\sigma^2)$且

$$X_t=a(B)\varepsilon_t=\sum_{j=0}^{q}a_j\varepsilon_{t-j},\qquad a(z)=\sum_{j=0}^{q}a_jz^j.$$

由条件$a(z)\neq 0$对$|z|=1$成立，故$a(z)$在单位圆上无零点。将$a(z)$因式分解为

$$a(z)=a_0\prod_{k=1}^{q}(1-\alpha_kz),\qquad |\alpha_k|\neq 1.$$

对所有满足$|\alpha_k|>1$的零点，作“反演”$\beta_k=\overline{\alpha_k}^{-1}$；对$|\alpha_k|<1$则取$\beta_k=\alpha_k$。定义

$$b(z):=a_0\prod_{k=1}^{q}(1-\beta_kz).$$

则对任意$|z|\leq 1$，有$|\beta_kz|<1$，从而$1-\beta_kz\neq 0$，故

$$b(z)\neq 0,\qquad (|z|\leq 1).$$

再定义

$$c(z):=\frac{a(z)}{b(z)}=\prod_{|\alpha_k|>1}\frac{1-\alpha_kz}{1-\overline{\alpha_k}^{-1}z},\qquad \eta_t:=c(B)\varepsilon_t.$$

于是

$$X_t=a(B)\varepsilon_t=b(B)c(B)\varepsilon_t=b(B)\eta_t=\sum_{j=0}^{q}b_j\eta_{t-j}.$$

并且对$|z|=1$可验证$|c(z)|=1$（全通滤波器），故η_t的谱密度仍为常数，从而$\{\eta_t\}$仍为零均值白噪声。证毕。□

习题3.3　设$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$是相互独立的平稳序列，并且有相同的均值和自协方差函数γ_X。定义加密序列

$$Z_t=\begin{cases}X_n, & t=2n+1,\\ Y_n, & t=2n,\end{cases}$$

问$\{Z_t\}$是否平稳序列？证明你的结果。

解答：$\{Z_t\}$是平稳序列。分别验证其三个性质即可：

(1)

$$E[Z_t] = E[X] = E[Y].$$

(2)

$$E[Z_t^2] = E[X_t^2] \text{ 或 } E[Y_t^2],$$

此二者（由于X_t, Y_t均平稳）均有限。

(3) 记$\gamma_Z(t)$为$\{Z_t\}$的自协方差函数。由X与Y相互独立得交叉项协方差为0，从而

$$\gamma_Z(t) = \begin{cases} E[X_iY_j] - E[X_i]E[Y_j] = 0, & t \text{ 为奇数}, \\ E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = \gamma_X(\frac{t}{2}), \text{ 或 } E[Y_iY_j] - E[Y_i]E[Y_j] = \gamma_X(\frac{t}{2}), & t \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

故$\gamma_Z(t)$仅与滞后t有关，从而$\{Z_t\}$平稳。□

习题3.4　设$\{\varepsilon_t\}$是$WN(0, \sigma^2)$，$X_0 = 0$。对$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$，$t \in \mathbb{N}_+$，计算$X_t, X_s$的相关系数$\rho(t, s)$。

解答:

$$\rho(t, s) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t, X_s)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\mathrm{Var}(X_s)}}.$$

而

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j\right) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s} \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \min(t, s)\sigma^2,$$

并且

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = t\sigma^2, \qquad \mathrm{Var}(X_s) = s\sigma^2.$$

因此

$$\rho(t, s) = \frac{\min(t, s)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2 \cdot s\sigma^2}} = \frac{\min(t, s)}{\sqrt{ts}} = \sqrt{\frac{\min(t, s)}{\max(t, s)}}. \ \square$$