

史济怀《数学分析教程》下册习题整理

OrangeCat

Jan.27th 2026 - ???

1 多重积分

1.1 矩形区域上的积分

习题1 若 f 和 g 都在 $[0, 1]$ 上可积, 证明 $f(x)g(y)$ 在 $[0, 1]^2$ 上可积, 并且

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(y) dy \right).$$

解答: 从基本定义出发, $f(x)g(y)$ 在 $[0, 1]^2$ 上可积 $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^k f(x_i)g(y_i) \sigma_i - a \right| = 0.$$

σ_i 为小块面积。我们将 $[0, 1]^2$ 切成 n^2 块, 每块是

$$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right] \quad (1 \leq i, j \leq n, \text{ 边界不计}).$$

在第 (i, j) 块取点 (x_i, y_j) , 则有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2} f(x_i)g(y_j) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(y_j) \right).$$

而由一元可积性,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx, \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(y_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(y) dy.$$

故

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(y) dy \right). \square$$

习题2 计算积分

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} e^{x+y} dx dy.$$

解答: 直接运用上一题结论,

$$\iint_{[0,1]^2} e^{x+y} dx dy = \left(\int_0^1 e^x dx \right) \left(\int_0^1 e^y dy \right) = (e-1)^2. \square$$

习题3 设 $a > 0$, $I = [-a, a] \times [-a, a]$, 求证:

$$\iint_I \sin(x+y) dx dy = 0,$$

并试从几何上说明这一结果。

解答:

$$\begin{aligned} \iint_I \sin(x+y) dx dy &= \iint_I (\sin x \cos y + \sin y \cos x) dx dy \\ &= \left(\int_{-a}^a \sin x dx \right) \left(\int_{-a}^a \cos y dy \right) + \left(\int_{-a}^a \sin y dy \right) \left(\int_{-a}^a \cos x dx \right). \end{aligned}$$

而 $\sin t$ 是奇函数, 故

$$\int_{-a}^a \sin x dx = \int_{-a}^a \sin y dy = 0.$$

因此积分值为0。 \square

几何上: (x_0, y_0) 处与 $(-x_0, -y_0)$ 处函数值相反, 区域关于原点中心对称且有界, 故积分值为0。

习题4 证明定理10.1.8。

「定理10.1.8」设 f 在 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上有界, 那么以下四个条件等价:

- (1) f 在 I 上可积;
- (2) $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega_i \sigma_i = 0$, 其中 $\omega_i = M_i - m_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), M_i 和 m_i 分别为 f 在 σ_i 上的上、下确界;
- (3) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的一个分割 π , 使得 $\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon$;
- (4) $\underline{\int_I} f d\sigma = \bar{\int_I} f d\sigma$.

解答: 由基本定义有 (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4).

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \left| \left(\sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i \right) - a \right| = 0. \quad x_i, y_i \text{ 为 } \sigma_i \text{ 对应面积内任一点.} \\ \Leftrightarrow \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = a. \quad \text{我们证明这与(4)等价.} \end{aligned}$$

$$(1') \Rightarrow (4): \underline{\int_I} f d\sigma = \min \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = a = \max \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = \bar{\int_I} f d\sigma.$$

$$(4) \Rightarrow (1'): \text{取 } a := \underline{\int_I} f d\sigma = \bar{\int_I} f d\sigma. \Rightarrow \underline{\int_I} f d\sigma \leq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = \bar{\int_I} f d\sigma. \Rightarrow \text{积分值为 } a$$

故 (1) \Leftrightarrow (1') \Leftrightarrow (4). \square

习题5 证明: 闭矩形上的连续函数可积。

解答: 由连续性, 对任意给定 $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x_1, x_2 \in I$ 且 $\|x_1 - x_2\| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

将 I 切成若干小矩形 R_1, R_2, \dots, R_t , 使每个 R_i 的直径 $< \delta$, 则对任意 $x_1, x_2 \in R_i$ 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 即每块的振幅 $\omega_i < \varepsilon$ 。于是

$$\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^t \omega_i \sigma_i < \varepsilon \sum_{i=1}^t \sigma_i = \varepsilon \text{Area}(I).$$

故可令上、下和之差任意小, 由定理10.1.8知 f 在 I 上可积。 \square

1.2 Lebesgue定理

习题1 设点列 $\{p_n\}$ 在 \mathbb{R}^2 中有极限, 求证: 点集 $B = \{p_n\}$ 是零面积集。

解答: 设点列 $\{p_n\}$ 极限是 p 。对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$, $\forall N > n$ 有

$$d(p_N, p) < \varepsilon$$

而 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 是有限点集, 面积为0。

$$\Rightarrow B \subset \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \cup B(p, \varepsilon),$$

其中 $B(p, \varepsilon)$ 为以 p 为中心、半径 ε 的圆盘, 于是

$$\text{Area}(B) \leq \pi \varepsilon^2.$$

而 ε 可任取, 故 B 是零面积集。□

习题2 设有界集 $B \subset \mathbb{R}^2$ 且 B' 是零面积集, 求证: \overline{B} 也是零面积集。

解答: 我们只用考察并证明 $\overline{B} \setminus B'$ 也是零面积集即可。我们证明一个加强结论: 这个集合只有有限个点。

若非如此, 设 $\overline{B} \setminus B'$ 是无限点集。由于 B 有界, $\overline{B} \setminus B'$ 也有界, 设为 $[-N, N] \times [-N, N]$ 。

将 $[-N, N] \times [-N, N]$ 划分成4份:

$$[-N, 0] \times [-N, 0], \quad [-N, 0] \times [0, N], \quad [0, N] \times [-N, 0], \quad [0, N] \times [0, N].$$

由抽屉原理, $\overline{B} \setminus B'$ 在其中一个小区域里面积有无穷个点; 再细分四份, 仍有无穷个点。

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists (x_0, y_0) \in (-N, N) \times (-N, N) \text{ 使得 } [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \cap (\overline{B} \setminus B') \text{ 是无穷.}$$

\Rightarrow 由闭区间套定理, 存在极限点在 $\overline{B} \setminus B'$ 内, 但这与 B' 的定义矛盾! □

习题3 证明: $[0, 1]^2$ 中的全体有理点所成的集不是零面积集, 但是零测集。

解答: 先证它不是零面积集: 若是, 则我们取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在有限个长方形 P_1, P_2, \dots, P_m

使得有理点集被 $\bigcup_{i=1}^m P_i$ 包含。且

$$\text{Area}\left(\bigcup_{i=1}^m P_i\right) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Area}\left([0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i\right) \geq \frac{1}{2}.$$

而

$$\left([0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i\right)^\circ$$

是面积为正的开集。

任取 $([0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i)^\circ$, $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得

$$B(p_0, \varepsilon_0) \subset [0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i.$$

由有理点稠密性矛盾, 故证毕。零测性由可数性显然。□

习题4 设闭矩形 $J \subset I$, 且 f 在 I 上可积, 求证: f 在 J 上也可积。

解答: 若 f 在 I 上可积, 由定理10.1.8, 我们将条件转写成叙述为(2):

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega_i \sigma_i = 0,$$

其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 为第*i*块区域的上、下确界之差, σ_i 是 I 的一个划分。

我们只需要在划分的时候“稍加留意”, 把 J 的边界也作为划分痕迹:

$$\Rightarrow \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega_i \sigma_i \geq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^t \omega_{J(j)} \sigma_{J(j)},$$

$J(1), J(2), \dots, J(t)$ 是 J 在划分中的对应块。故有

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^t \omega_{J(j)} \sigma_{J(j)} = 0.$$

由定理10.1.8, (2) \Rightarrow (1)有 f 在 J 上可积。 \square

习题5 设在 I 上可积函数 $f > 0$, 求证: $\int_I f d\sigma > 0$ 。

解答: 堪忧, 这还要证? Trivial. \square

习题6 研究定义在区域 $[0, 1]^2$ 上的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{1}{xy}, & x \neq 0 \text{ 且 } y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } y = 0, \end{cases}$$

的可积性。

解答: 原函数在定义域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的不连续点集为

$$\{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\}.$$

这明显是零测集 (甚至是零面积集), 从而由Lebesgue定理, f 在 $[0, 1]^2$ 上可积。 \square

习题7 设 I 是一个有界的矩形, $B = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\} \subset I$, 定义函数

$$f(p) = \begin{cases} 0, & p \notin B, \\ \frac{1}{n}, & p = p_n (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

研究函数 f 在 I 上的可积性。

解答: B 至多可数从而零测。间断点是零测集, 由Lebesgue定理知可积。 \square

习题8 设函数 f 和 g 在 I 上可积, 求证: fg 在 I 上也可积; 当 g 在 I 上不取零值且 f/g 在 I 上有界时, f/g 在 I 上也可积。

解答: fg 和 f/g 的间断点为 f 的间断点和 g 的间断点的并集的子集。

(f/g 在 g 不取0时可以这样论证) 仍然是零测集, 由Lebesgue定理知可积。 \square

习题9 设 f 在 I 上可积, 证明: $|f|$ 在 I 上也可积, 并且

$$\left| \int_I f d\sigma \right| \leq \int_I |f| d\sigma.$$

解答: $|f|$ 的间断点是 f 的间断点的子集, 而其是零测, 由Lebesgue定理知 $|f|$ 也可积。而

$$\left| \int_I f d\sigma \right| = \left| \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i) \sigma_i \right| \leq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k |f(x_i)| \sigma_i = \int_I |f| d\sigma. \square$$

问题1 设 $\int_I f d\sigma > 0$, 求证: 存在闭矩形 $J \subset I$, 使得 $f > 0$ 在 J 上成立。

解答: 我们采取反证法。若不存在这样的小矩形 J : 对 $\forall x \in I$ 满足 $f(x) > 0$, 我们可知 f 在 x 处必不连续。

从而 $\{x \mid f(x) > 0\}$ 是不连续点集的子集。取 $P = \{x \mid f(x) > 0\}$.

由 Lebesgue 定理知 P 是零测集。从而 $\int_I f d\sigma = \int_{I \setminus P} f d\sigma < 0$, 矛盾。□

问题2 对 $(x, y) \in [0, 1]^2$, 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{q}, & x = \frac{n}{m}, y = \frac{p}{q}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

证明: f 在 $[0, 1]^2$ 上可积, 这里 $m, n, q, p \in \mathbb{N}^*$ 。

解答: 我们考虑间断点集, 发现它是 $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$.

因为但凡函数值为 0 的点集都不是间断点: 取 ε 足够小, 以 ε 为半径的圆内的有理数分母会任意大。

而 $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$ 可数, 从而零测。由 Lebesgue 定理, 原函数可积。□

1.3 矩形区域上二重积分的计算

习题1 计算下列积分:

$$(1) \iint_I \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, I = [0, 1]^2;$$

$$(2) \iint_I x \cos(xy) dx dy, I = [0, \pi/2] \times [0, 1];$$

$$(3) \iint_I \sin(x+y) dx dy, I = [0, \pi]^2.$$

解答:

$$(1) \iint_I \frac{x^2}{1+y^2} dx dy = \left(\int_0^1 x^2 dx \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \right) = \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \right) \left(\arctan y \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}. \square$$

$$(2) \iint_I x \cos(xy) dx dy = \int_0^1 x \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \cos(xy) dy \right) dx.$$

$$\text{而 } \int_0^{\pi/2} \cos(xy) dy = \frac{1}{x} \sin(xy) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{x} \sin \frac{\pi x}{2} \Rightarrow \int_0^1 x \left(\int_0^{\pi/2} \cos(xy) dy \right) dx = \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} dx = 1. \square$$

$$(3) \iint_I \sin(x+y) dx dy = \iint_I \sin x \cos y dx dy + \iint_I \sin y \cos x dx dy$$

$$= (\int_0^\pi \sin x dx) (\int_0^\pi \cos y dy) + (\int_0^\pi \cos x dx) (\int_0^\pi \sin y dy) = 0. \square$$

习题2 设函数 f 在矩形 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上有连续的二阶偏导数, 计算积分 $\iint_I \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) dx dy$ 。

解答:

$$\begin{aligned} \iint_I \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=c}^{y=d} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f(x, d)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, c)}{\partial x} \right) dx = f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c). \square \end{aligned}$$

习题3 计算积分 $\int_I f d\sigma$ ($I = [0, 1]^2$):

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \leq x^2, \\ 0, & y > x^2; \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0, & y < x^2 \text{ 或 } y > 2x^2. \end{cases}$$

解答:

(1)

$$\int_I f d\sigma = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} 1 dy \right) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \square$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_I f d\sigma &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_{x^2}^{2x^2} (x + y) dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\int_{x^2}^1 (x + y) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(x^3 + \frac{3}{2} x^4 \right) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\frac{1}{2} + x - x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{10} x^5 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}/2} + \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{10} x^5 \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^1 = \left(\frac{1}{16} + \frac{3\sqrt{2}}{80} \right) + \left(\frac{37}{80} - \frac{19\sqrt{2}}{80} \right) = \frac{21}{40} - \frac{\sqrt{2}}{5}. \square \end{aligned}$$

习题4 利用定理10.3.4中的Minkowski不等式, 证明: 对 $a_k \geq 0, b_k \geq 0 (k = 1, 2, \dots, n), p \geq 1$, 有不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p}.$$

「定理10.3.4」 (Minkowski不等式) 设 f 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上非负、连续, $p \geq 1$, 那么

$$\left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x, y) dx \right)^{1/p} dy.$$

当 $p > 1$ 时, 等式成立的充分必要条件是

$$f(x, y) = u(x)v(y).$$

解答: 我们取

$$f_\varepsilon(x, y) \leq \begin{cases} h(x), & 0 \leq y \leq 1 - \varepsilon, \\ g(x), & 1 + \varepsilon \leq y \leq 2, \\ \frac{1}{2\varepsilon}(1 + \varepsilon - y)h(x) + \frac{1}{2\varepsilon}(y - 1 + \varepsilon)g(x), & 1 - \varepsilon \leq y \leq 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

则 f_ε 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上非负连续, $p > 1$ 。由 Minkowsky 不等式有:

$$(\varepsilon \rightarrow 0) \quad \left(\int_a^b (h(x) + g(x))^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b h^p(x) dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{1/p}.$$

我们再取 $g(x) = a_i (i - 1 \leq x < i) (1 \leq i \leq k), h(x) = b_i$ 。取积分上下限 $a = 0, b = k$, 即有:

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p}. \quad \square$$

习题5 设 f, g 都在 $[a, b]$ 上可积, 利用二重积分不等式

$$\iint_{[a, b]^2} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 dx dy \geq 0,$$

证明Cauchy-Schwarz不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

解答:
$$\begin{aligned} & \iint_{[a,b]^2} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 dx dy = \iint_{[a,b]^2} (f^2(x)g^2(y) + f^2(y)g^2(x) - 2f(x)f(y)g(x)g(y)) dx dy \\ &= 2 \iint_{[a,b]^2} (f^2(x)g^2(y) - f(x)g(x)f(y)g(y)) dx dy \geq 0. \\ & \Rightarrow \iint_{[a,b]^2} f^2(x)g^2(y) dx dy \geq \iint_{[a,b]^2} f(x)g(x)f(y)g(y) dx dy. \\ & \Rightarrow \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(y) dy \right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2. \quad \square \end{aligned}$$

问题1 设 f 是问题10.2的第2题中定义的函数。证明:

- (1) $f(x, p/q)$ 对 $x \in [0, 1]$ 上不可积;
- (2) $f(n/m, y)$ 对 $y \in [0, 1]$ 上不可积。

解答: (1) 我们证明 $f(x, p/q)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上处处不连续:

其实由于有理数集和无理数集都是稠密的, 故而在任何一个极小的区间内, 都存在有理点和无理点。

f 值也在0和 $> 1/q$ 之间变动。故 f 在 $[0, 1]$ 上处处不连续, 从而不可积(两问思路完全一致)。 \square

问题2 对 $(x, y) \in [0, 1]^2$, 定义

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & x = \frac{n}{m}, y = \frac{p}{m}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明: $\int_0^1 dx \int_0^1 g(x, y) dy$ 和 $\int_0^1 dy \int_0^1 g(x, y) dx$ 都存在, 但 g 在 $[0, 1]^2$ 上不可积。

解答:

(1) 先证两种迭代积分都存在且都等于0。

固定 $x \in [0, 1]$, 考察 $y \mapsto g(x, y)$ 。

若 x 为无理数, 则对任意 y 都有 $g(x, y) = 0$, 故

$$\int_0^1 g(x, y) dy = 0.$$

若 x 为有理数。将 x 写成既约分数 $x = \frac{n}{m}$ ($(n, m) = 1$), 则由定义,

$$g(x, y) = 1 \iff y = \frac{p}{m} (p = 0, 1, \dots, m),$$

因此 $g(x, y) = 1$ 只发生在有限多个点上, 其余处为0。于是 $y \mapsto g(x, y)$ 只有有限多个不连续点, 从而在 $[0, 1]$ 上Riemann可积, 并且

$$\int_0^1 g(x, y) dy = 0.$$

综上, 对所有 $x \in [0, 1]$ 都有 $\int_0^1 g(x, y) dy = 0$, 因此

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y) dy \right) dx = 0.$$

同理, 交换 x, y 角色可得对所有 y 都有 $\int_0^1 g(x, y) dx = 0$, 从而

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y) dx \right) dy = 0.$$

故两种迭代积分都存在且都等于0。

(2) 再证 g 在 $[0, 1]^2$ 上 (Riemann意义) 不可积。

任取 $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ 。取任意 $\varepsilon > 0$, 选取足够大的整数 m 使得 $\frac{1}{m} < \varepsilon$ 。令 $n = \lfloor mx_0 \rfloor$, $p = \lfloor my_0 \rfloor$, 则点

$$\left(\frac{n}{m}, \frac{p}{m}\right) \in [0, 1]^2, \quad \left|\frac{n}{m} - x_0\right| \leq \frac{1}{m} < \varepsilon, \quad \left|\frac{p}{m} - y_0\right| \leq \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

且按定义有 $g\left(\frac{n}{m}, \frac{p}{m}\right) = 1$ 。另一方面, 在 (x_0, y_0) 的任意邻域内也显然存在 $g = 0$ 的点 (例如取任意一个不是上述形式的点)。因此在 (x_0, y_0) 任意邻域内, g 同时取到1与0, 故 g 在 (x_0, y_0) 不连续。

由 (x_0, y_0) 任意性知, g 在 $[0, 1]^2$ 上处处不连续, 故其不连续点集为整个 $[0, 1]^2$ (测度不为0), 从而 g 在 $[0, 1]^2$ 上Riemann不可积。□

1.4 有界函数上的二重积分

习题1 证明定理10.4.5。

「定理10.4.5」 设有界集 $B \subset \mathbb{R}^2$, 则 B 有面积当且仅当 B 的边界 ∂B 是一零面积集。

解答: 首先先证明一个引理:

[lemma] ∂B 是闭集。

[prove] 我们反过来证明 $\mathbb{R}^2/\partial B$ 是开集: 任取 $x_0 \in \mathbb{R}^2/\partial B$ 。

若对 $\forall \varepsilon > 0$ 均存在 $x_\varepsilon \in \partial B$ 使 $d(x_0, x_\varepsilon) < \varepsilon$, 则 $x_0 \in \overline{\partial B} = \partial B \Rightarrow$ 矛盾!

回到原题: ∂B 零面积 $\Leftrightarrow \partial B$ 零测

\Leftrightarrow 取

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin B, \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

间断点零测 $\Leftrightarrow \int_B 1 d\sigma$ 可积 $\Leftrightarrow B$ 有面积。□

习题2 证明:

$$1.96 < \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} < 2.$$

解答: 在整个区域上, $\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ 的取值在 $\left[\frac{1}{102}, \frac{1}{100}\right]$ 内, 且无法一直取到上极限。

而其面积为 $\frac{1}{2} \times 20 \times 20 = 200 \Rightarrow$

$$\iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \in \left[\frac{200}{102}, \frac{200}{100}\right] \subset (1.96, 2). \quad \square$$

习题3 证明: 设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 是一有界集, 那么 B 有面积的充要条件是: 对 $I \supset B$ 的矩形 I 的任何矩形网分割 π , 均有

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{I_i \cap B \neq \emptyset} \sigma(I_i) = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{I_i \subset B} \sigma(I_i).$$

解答: B 有面积等价于 $\int_B 1 d\sigma$ 存在。我们取

$$f_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

则 $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{I_i \cap B \neq \emptyset} \sigma(I_i)$ 是 $\int_I f_B d\sigma$ 的上和, $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{I_i \subset B} \sigma(I_i)$ 是 $\int_I f_B d\sigma$ 下和。上下和相等 \Leftrightarrow 可积。 \square

1.5 有界集合上积分的计算

习题1 计算下列积分:

$$(1) \iint_D \cos(x+y) dx dy, \quad D \text{ 由 } x=0, y=x, y=\pi \text{ 围成};$$

$$(2) \iint_D xy^2 dx dy, \quad D \text{ 由 } y^2 = 4x \text{ 和 } x=1 \text{ 围成};$$

$$(3) \iint_D e^{x+y} dx dy, \quad D = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\};$$

$$(4) \iint_D |xy| dx dy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\};$$

$$(5) \iint_D x \cos(xy) dx dy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\};$$

$$(6) \iint_D |\cos(x+y)| dx dy, \quad D = [0,1]^2;$$

$$(7) \iint_D y^2 dx dy, \quad D \text{ 由 } \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ 与 } y=0 \text{ 围成};$$

$$(8) \iint_D [x+y] dx dy, \quad D = [0,2]^2.$$

解答:

$$(1) \iint_D \cos(x+y) dx dy = \int_0^\pi \left(\int_0^y \cos(x+y) dx \right) dy = \int_0^\pi \sin(x+y) \Big|_0^y dy = \int_0^\pi (\sin 2y - \sin y) dy = \int_0^\pi \sin 2y dy - \int_0^\pi \sin y dy = -2. \square$$

$$(2) \iint_D xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{16}{3} x^{5/2} dx = \frac{32}{21}. \square$$

(3) D 可分为两部分: 当 $y \in [-1, 0]$ 时, $x \in [-(1+y), 1+y]$; 当 $y \in [0, 1]$ 时, $x \in [y-1, 1-y]$ 。

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y} dx dy &= \int_{-1}^0 \left(\int_{-(1+y)}^{1+y} e^{x+y} dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} e^{x+y} dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^0 \left(e^{x+y} \Big|_{x=-(1+y)}^{x=1+y} \right) dy + \int_0^1 \left(e^{x+y} \Big|_{x=y-1}^{x=1-y} \right) dy = \int_{-1}^0 (e^{1+2y} - e^{-1}) dy + \int_0^1 (e - e^{2y-1}) dy \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{1+2y} \Big|_{-1}^0 - e^{-1} \right) + \left(e - \frac{1}{2} e^{2y-1} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e^{-1} - e^{-1} + \left(e - \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e^{-1} \right) = e - \frac{1}{e}. \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \iint_D |xy| dx dy &= 4 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy dy \right) dx = 4 \int_0^a \left(\frac{1}{2} x \cdot y^2 \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} \right) dx = 4 \int_0^a \frac{1}{2} x (a^2 - x^2) dx \\ &= 2a^2 \int_0^a x dx - 2 \int_0^a x^3 dx = a^4 - \frac{1}{2} a^4 = \frac{1}{2} a^4. \square \end{aligned}$$

(5) 因为 $x \cos(xy) + (-x) \cos((-x)y) = 0$, 且该区域关于 y 轴对称且有界, 故积分值为 0。 \square

(6)

$$\iint_D |\cos(x+y)| dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \left(\int_0^1 \cos(x+y) dy \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}-1}^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy \right) dx$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}-1}^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}-x}^1 \cos(x+y) dy \right) dx = 3 - \pi + \cos 2 + 2 \cos 1. \quad \square$$

(7) 取 $P(x, y) = -\frac{1}{3}y^3$, $Q(x, y) = 0$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2$ 。由Green公式,

$$\iint_D y^2 dx dy = \oint_{\partial D} P dx = -\frac{1}{3} \oint_{\partial D} y^3 dx.$$

沿 x 轴段 $y = 0$ 贡献为 0, 只需算旋轮线一拱。取 $0 \leq t \leq 2\pi$, $y = a(1 - \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a(1 - \cos t)$, 得

$$\iint_D y^2 dx dy = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} y^3 \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^4 (1 - \cos t)^4 dt = \frac{1}{3} \cdot a^4 \cdot \frac{35\pi}{4} = \frac{35\pi}{12} a^4. \quad \square$$

$$(8) \iint_{[0,2]^2} [x+y] dx dy = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 2 = 6. \quad \square$$

2 曲线积分

2.1 第一型曲线积分

习题1 计算下列曲线积分:

- (1) $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)^n ds$, $\Gamma: x = a \cos t$, $y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 其中 $n \in \mathbb{N}$;
- (2) $\int_{\Gamma} (x+y) ds$, Γ : 顶点为 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ 的三角形的边界;
- (3) $\int_{\Gamma} z ds$, Γ : 圆锥螺线 $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);
- (4) $\int_{\Gamma} x^2 ds$, Γ : 圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$;
- (5) $\int_{\Gamma} y^2 ds$, Γ : 旋轮线的一拱, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)。

解答:

$$(1) \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} = a.$$

因此 $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)^n ds = \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2)^n a dt = \int_0^{2\pi} a^{2n} \cdot a dt = 2\pi a^{2n+1}$ ($a > 0$)。 \square

(2) 取 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 为 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 、 $(0,0)$ 到 $(0,1)$ 以及 $(1,0)$ 到 $(0,1)$ 的线段, 则

$$\int_{\Gamma} (x+y) ds = \int_{\ell_1} (x+y) ds + \int_{\ell_2} (x+y) ds + \int_{\ell_3} (x+y) ds = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} + 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1. \quad \square$$

$$(3) \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{t^2 + 2}, \text{ 故}$$

$$\int_{\Gamma} z ds = \int_0^{2\pi} t \sqrt{t^2 + 2} dt.$$

而

$$\int t \sqrt{t^2 + 2} dt = \int \sqrt{t^2 + 2} d\left(\frac{1}{2}t^2\right) = \frac{1}{2} \int \sqrt{t^2 + 2} d(t^2 + 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (t^2 + 2)^{3/2} + C = \frac{1}{3} (t^2 + 2)^{3/2} + C.$$

因此

$$\int_{\Gamma} z ds = \frac{1}{3} (t^2 + 2)^{3/2} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{3} (4\pi^2 + 2)^{3/2} - \frac{2}{3} \sqrt{2}. \quad \square$$

(4) 取参数

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a \sin \theta, a \left(\frac{\sqrt{6}}{6} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \right), a \left(\frac{\sqrt{6}}{6} \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \right) \right).$$

则

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2} = a,$$

从而

$$\int_{\Gamma} x^2 ds = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} a^2 \sin^2 \theta \cdot a d\theta = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{2}{3} \pi a^3. \square$$

$$(5) \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = 2a \sin \frac{t}{2}, \text{ 故}$$

$$\int_{\Gamma} y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt = 16a^3 \int_0^{\pi} \sin^5 p dp \quad \left(\frac{t}{2} = p \right).$$

再令 $-\cos p = \xi$, 则 $d\xi = \sin p dp$, 并且 $\sin^4 p = (1 - \xi^2)^2$, 因此

$$16a^3 \int_0^{\pi} \sin^5 p dp = 16a^3 \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^2 d\xi = 16a^3 \left(\frac{1}{5}\xi^5 - \frac{2}{3}\xi^3 + \xi \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{256}{15}a^3. \square$$

2.2 第二型曲线积分

习题1 计算下列第二型曲线积分:

$$(1) \int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}, \quad \Gamma \text{ 表示逆时针方向的圆周 } x^2 + y^2 = a^2;$$

$$(2) \int_{\Gamma} (x + y) dx + (x - y) dy, \quad \Gamma \text{ 表示逆时针方向的椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$(3) \int_{\Gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy, \quad \Gamma: x = y^2 \quad (-1 \leq y \leq 1), \text{ 沿 } y \text{ 增加的方向};$$

$$(4) \int_{\Gamma} x dy, \quad \Gamma: \text{ 直线 } 2x + y = 1 \text{ 与两坐标轴组成的三角形, 沿逆时针方向};$$

$$(5) \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dy, \quad \Gamma: \text{ 由 } x = 1, x = 3, y = 1, y = 4 \text{ 构成的矩形, 沿逆时针方向}.$$

解答:

(1) 取参数方程 $(x, y) = (a \cos \theta, a \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则

$$dx = -a \sin \theta d\theta, \quad dy = a \cos \theta d\theta.$$

从而

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta - a \sin \theta \cdot (-a \sin \theta d\theta)}{a^2} = d\theta.$$

故

$$\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \square$$

(2) 取参数方程 $(x, y) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则

$$dx = -a \sin \theta d\theta, \quad dy = b \cos \theta d\theta.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (x+y) dx + (x-y) dy &= \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b \sin \theta)(-a \sin \theta) d\theta + \int_0^{2\pi} (a \cos \theta - b \sin \theta)(b \cos \theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-a^2 \sin \theta \cos \theta - ab \sin^2 \theta + ab \cos^2 \theta - b^2 \sin \theta \cos \theta \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(ab(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (a^2 + b^2) \sin \theta \cos \theta \right) d\theta.
\end{aligned}$$

由于

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta = 0,$$

故积分值为0。 \square

(3) 由 $\Gamma : x = y^2$ 且沿 y 增加方向, 取参数 $y = t, x = t^2$ ($-1 \leq t \leq 1$), 则 $dx = 2t dt, dy = dt$ 。代入得

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy &= \int_{-1}^1 \left((t^4 - 2t^3) \cdot 2t + (t^2 - 2t^3) \right) dt \\
&= \int_{-1}^1 (2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2) dt = \left[\frac{1}{3}t^6 - \frac{4}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 \right]_{-1}^1 = -\frac{14}{15}. \quad \square
\end{aligned}$$

(4) Γ 为三角形边界 (逆时针)。在 x 轴上 $dy = 0$, 在 y 轴上 $x = 0$, 两段积分均为0; 只需计算直线段 $2x + y = 1$ 上的积分。该段可写为 $x = \frac{1-y}{2}$, 且 $y : 0 \rightarrow 1$, 故

$$\int_{\Gamma} x dy = \int_0^1 \frac{1-y}{2} dy = \frac{1}{2} \left[y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}. \quad \square$$

(5) 上下两条边为水平线, $dy = 0$, 贡献为0; 只需算两条竖边。

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dy &= \int_1^4 (3^2 + y^2) dy + \int_4^1 (1^2 + y^2) dy \\
&= \int_1^4 (9 + y^2) dy - \int_1^4 (1 + y^2) dy = \int_1^4 8 dy = 24. \quad \square
\end{aligned}$$

习题2 设常数 a, b, c 满足 $ac - b^2 > 0$, 计算积分 $\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{ax^2 + 2bxy + cy^2}$, 其中 Γ 为逆时针方向的单位圆周。

解答: 已知

$$\Gamma : x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

则

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt.$$

分子化简为

$$x dy - y dx = \cos t (\cos t dt) - \sin t (-\sin t dt) = (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = dt.$$

故原积分化为

$$\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{ax^2 + 2bxy + cy^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a \cos^2 t + 2b \sin t \cos t + c \sin^2 t}.$$

利用二倍角公式

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \sin t \cos t = \frac{\sin 2t}{2},$$

得到分母

$$a \cos^2 t + 2b \sin t \cos t + c \sin^2 t = m + A \cos 2t + B \sin 2t,$$

其中

$$m = \frac{a+c}{2}, \quad A = \frac{a-c}{2}, \quad B = b.$$

令

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2},$$

则存在 δ 使得

$$A \cos 2t + B \sin 2t = R \cos(2t - \delta),$$

从而分母可写为

$$m + R \cos(2t - \delta).$$

令换元 $u = 2t - \delta$, 则 $dt = \frac{du}{2}$ 。利用周期性 (区间平移不改变积分值) 可化为标准形式

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{m + R \cos(2t - \delta)} = \int_0^{2\pi} \frac{du}{m + R \cos u}.$$

当 $m > |R|$ 时有熟知结论

$$\int_0^{2\pi} \frac{du}{m + R \cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 - R^2}}.$$

因此

$$\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{ax^2 + 2bxy + cy^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 - R^2}}.$$

并且

$$m^2 - R^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2\right] = ac - b^2.$$

最终得到

$$\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{ax^2 + 2bxy + cy^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{ac - b^2}} \square.$$

习题3 计算下列第二型曲线积分, 曲线的正向是参数增加的方向:

$$(1) \int_{\Gamma} xz^2 dx + yx^2 dy + zy^2 dz, \quad \Gamma: x = t, y = t^2, z = t^3 \ (0 \leq t \leq 1);$$

$$(2) \int_{\Gamma} (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz, \quad \Gamma: x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t \ (0 \leq t \leq \pi).$$

解答:

(1) 由 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 得

$$dx = dt, \quad dy = 2t dt, \quad dz = 3t^2 dt.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xz^2 dx + yx^2 dy + zy^2 dz &= \int_0^1 \left(t \cdot (t^3)^2 \cdot 1 + t^2 \cdot t^2 \cdot 2t + t^3 \cdot (t^2)^2 \cdot 3t^2 \right) dt \\ &= \int_0^1 (t^7 + 2t^5 + 3t^9) dt = \left[\frac{t^8}{8} + \frac{2t^6}{6} + \frac{3t^{10}}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{91}{120}. \quad \square \end{aligned}$$

(2) 先求导数:

$$\frac{dx}{dt} = 2a \sin t \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 2a \cos^2 t - 2a \sin^2 t, \quad \frac{dz}{dt} = -2a \sin t \cos t.$$

原积分化为

$$\int_0^\pi \left((y+z) \frac{dx}{dt} + (z+x) \frac{dy}{dt} + (x+y) \frac{dz}{dt} \right) dt = 2a^2 \int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos t \sin t + 1) dt.$$

注意到

$$(\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos t \sin t + 1) = \cos 2t \left(\frac{1}{2} \sin 2t + 1 \right),$$

故

$$2a^2 \int_0^\pi \cos 2t \left(\frac{1}{2} \sin 2t + 1 \right) dt = 0.$$

因此积分值为0。□

习题4 计算

$$\oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

其中 Γ 为球面片 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界，方向为 $(1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0)$ 。

解答：

由对称性只需要计算 $\oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx$ 。

在弧段 $(0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1)$ 上有 $x \equiv 0$ ，故 $dx = 0$ ，该段积分为0。

在弧段 $(0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0)$ 上（位于 $y = 0$ 平面），取参数

$$x = \sin \theta, \quad z = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

则 $dx = \cos \theta d\theta$ ，且 $y^2 - z^2 = -\cos^2 \theta$ ，于是

$$\int (y^2 - z^2) dx = \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 \theta) \cos \theta d\theta = - \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \left(\frac{1}{3} \sin^3 \theta - \sin \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}.$$

在弧段 $(1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$ 上（位于 $z = 0$ 平面），取参数

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

则 $dx = -\sin \theta d\theta$ ，且 $y^2 - z^2 = \sin^2 \theta$ ，于是

$$\int_{\Gamma_3} (y^2 - z^2) dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta (-\sin \theta) d\theta = - \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = -\frac{2}{3}.$$

故

$$\oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.$$

于是总积分

$$\oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) = -4. \quad \square$$

习题5 证明：

$$\left| \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{p} \right| \leq \int_{\Gamma} \|\mathbf{F}\| ds.$$

解答：

设曲线参数方程为 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ ，则

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{p} = \int_a^b \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

由Cauchy–Schwarz 不等式,

$$\left| \int_a^b \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt \right| \leq \int_a^b \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt.$$

注意

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt = ds,$$

故

$$\left| \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{p} \right| \leq \int_{\Gamma} \|\mathbf{F}\| ds. \quad \square$$

2.3 Green公式

习题1 利用Green 公式, 计算下列积分:

- (1) $\int_{\Gamma} xy^2 dy - x^2 y dx$, Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 按逆时针方向;
- (2) $\int_{\Gamma} (x+y) dx - (x-y) dy$, Γ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 按逆时针方向;
- (3) $\int_{\Gamma} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$, Γ 为上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$, 沿 x 增加的方向.

解答:

(1) $P = xy^2$, $Q = -x^2y$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = xy,$$

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-4xy) dx dy.$$

由于区域关于 x, y 两轴对称, 故积分值为0。 \square

(2) $P = x + y$, $Q = y - x$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_D (-2) dx dy = -2\pi ab. \quad \square$$

(3) $P = e^x \sin y$, $Q = e^x \cos y$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y.$$

令 Γ' 为该上半圆的弦, 则

$$\int_{\Gamma} (e^x \sin y dx + e^x \cos y dy) = \int_{\Gamma + \Gamma'} (e^x \sin y dx + e^x \cos y dy) - \int_{\Gamma'} (e^x \sin y dx + e^x \cos y dy).$$

而由Green 公式该积分为0。又有 Γ' 上有 $y = 0$, $\sin y = dy = 0$, 故

$$\int_{\Gamma'} (e^x \sin y dx + e^x \cos y dy) = 0.$$

故原积分为0。 \square

习题2 利用Green 公式, 计算下列曲线围成的面积:

- (1) 星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$;
- (2) 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (提示: 令 $y = x \tan \theta$);
- (3) Descartes(笛卡儿, 1596~1650)叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy (a > 0)$ (提示: 令 $y = xt$).

解答:

$$(1) \text{Area}(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \right) \, dx \, dy, \text{ Green: } P = 0 \text{ & } Q = x, \text{ 则}$$

$$\text{Area}(D) = \oint x \, dy = \int_0^{2\pi} 3a \sin^2 t \cos t \cdot a \cos^3 t \, dt = \int_0^{2\pi} 3a^2 \sin^2 t \cos^4 t \, dt.$$

计算不定积分:

$$\int \sin^2 t \cos^4 t \, dt = \frac{1}{4} \int (2 \sin t \cos t)^2 \cos^2 t \, dt = \frac{1}{8} \int \sin^2 2t (\cos 2t + 1) \, dt,$$

令 $2t = k$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16} \int \sin^2 k (1 + \cos k) \, dk = \frac{1}{16} \int \sin^2 k \, dk + \frac{1}{16} \int \sin^2 k \cos k \, dk, \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos^2 k) \, dk + \frac{1}{16} \int \sin^2 k \, d(\sin k), \\ &= \frac{1}{16} k - \frac{1}{32} \sin 2k + \frac{1}{48} \sin^3 k + C = \frac{1}{8} t - \frac{1}{32} \sin 4t + \frac{1}{48} \sin^3 2t + C. \end{aligned}$$

则

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^4 t \, dt = \frac{1}{8} \cdot 2\pi, \text{Area}(D) = 3a^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\pi = \frac{3}{4} a^2 \pi. \square$$

(2) 作参数变换 $y = x \tan \theta$,

$$\begin{aligned} (x^2 + x^2 \tan^2 \theta)^2 &= a^2(x^2 - x^2 \tan^2 \theta) \\ \Rightarrow \frac{x^4}{\cos^4 \theta} &= a^2 \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \Rightarrow x = \sqrt{\cos 2\theta} \cdot a \cos \theta, \end{aligned}$$

(因 $x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow |\tan \theta| \leq 1$, 从而 $\cos 2\theta$ 是正的)

$$y = x \tan \theta = \sqrt{\cos 2\theta} \cdot a \sin \theta.$$

我们计算第一象限内 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 部分的面积, 由对称性可知, 这是四块的面积的 $1/4$:

$$\begin{aligned} S &= \oint x \, dy = \int (a \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta}) \, d(a \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}) \\ &= a^2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos \theta \cdot \left(\cos \theta \cdot \sqrt{\cos 2\theta} + \sin \theta \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2\theta}} \cdot 2 \cdot (-\sin 2\theta) \right) \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi/4} (\cos 2\theta \cos^2 \theta - \sin 2\theta \sin \theta \cos \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

而

$$\int \cos 2\theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{16} \sin 4\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{4} \theta, \int \sin 2\theta \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \theta - \frac{1}{16} \sin 4\theta. S = \frac{1}{4} a^2.$$

因此面积为 $4S = a^2$. \square

(3) (此题未做, 留空)

3 曲面积分

4 场论的数学基础

5 函数列和函数项级数

6 反常积分

7 Fourier分析

8 含参变量积分